Aplicaciones de las leyes de conservación de la energía

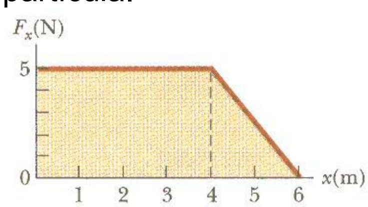
Estrategia para resolver problemas

El siguiente procedimiento debe aplicarse cuando se resuelven problemas relacionados con la conservación de la energía:

- Defina su sistema, el cual puede incluir más de un objeto y puede o no incluir campos, resortes u otras fuentes de energía potencial.
- Seleccione una posición de referencia donde la energía potencial (tanto gravitacional como elástica) sea igual a cero, y utilice esta posición en su análisis. Si hay más de una fuerza conservativa, escriba una expresión para la energía potencial asociada a cada fuerza.
- Recuerde que si la fricción o la resistencia del aire están presentes, la energía mecánica no es constante.
- Si la energía mecánica es constante, escriba la energía inicial total, $E_i = K_i + U_i$, en algún punto como la suma de las energías cinética y potencial. Después escriba una expresión para la energía final total, $E_f = K_f + U_f$ en el punto final. Puesto que la energía mecánica es constante, iguale las energías totales y despeje la incógnita.
- Si se presentan fuerzas externas o de fricción (en cuyo caso, la energía mecánica no es constante), escriba primero expresiones para las energías inicial total y final total. En este caso, la energía total difiere de la energía inicial total, y la diferencia es la cantidad de energía disipada por fuerzas no conservativas. Es decir, aplique la ecuación

$$(K + U)_i + \Delta K_{int,nc} + \Delta K_{ext} = (K + U)_f .$$

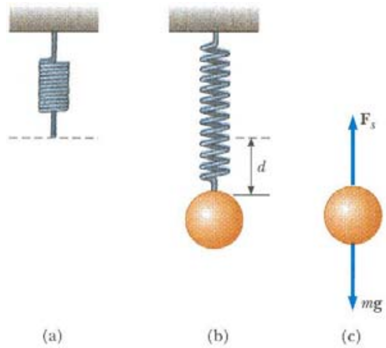
Trabajo de una fuerza. En la figura se muestra cómo varía con la posición una fuerza que actúa sobre una partícula.



Calcule el trabajo de la fuerza cuando la partícula se mueve desde x = 0 hasta x = 6.0 m.

Solución: El trabajo hecho por la fuerza es igual al área bajo la curva desde x = 0 hasta x = 6.0 m. Esta área es igual al área de la sección rectangular de x = 0 a x = 4.0 m más el área de la sección triangular de x = 4.0 m a x = 6.0 m. El área del rectángulo es *(*4.0) (5.0) N. m = 20 J y el área del triángulo es (2.0)(5.0)/2 N. m = 5.0 J. Por consiguiente el trabajo total realizado es de 25 J.

Medición de la dureza de un resorte. Una técnica común utilizada para medir la constante de fuerza de un resorte se describe en la figura.



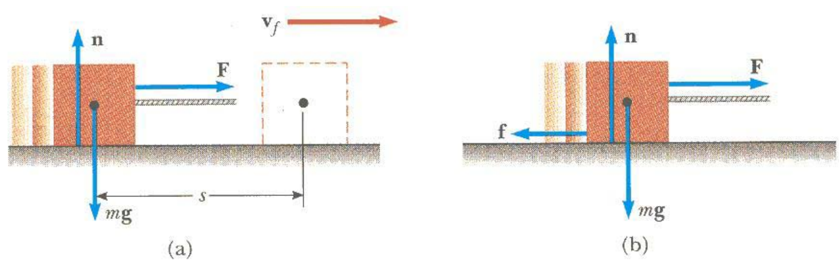
El resorte se cuelga verticalmente y luego se le une una masa m en su extremo inferior. El resorte se estira una distancia d a partir de su posición de equilibrio bajo la acción de la "carga" mg. Puesto que la fuerza del resorte está dirigida hacia arriba, cuando el sistema está en reposo, debe equilibrar el peso mg hacia abajo. En este caso, podemos aplicar la ley de Hooke y obtener $F = kd = mg$, o

$$k = \frac{mg}{d}$$

Por ejemplo, si un resorte se extiende 2.0 cm por una masa suspendida de 0.55 kg, la constante de fuerza del resorte es

K = mg/d = (0.55 kg)(9.80 m/s^2)/0.02 m = 269.5 N/m

Un bloque que se jala sobre una superficie sin fricción. Un bloque de 6.0 kg inicialmente en reposo es jalado hacia la derecha a lo largo de una superficie horizontal sin fricción por una fuerza horizontal constante de 12 N, como muestra la figura.



Encuentre la velocidad del bloque después de que se ha movido 3.0 m.

Solución: El peso del bloque es equilibrado por la fuerza normal, y ninguna de estas dos fuerzas hace trabajo porque el desplazamiento es horizontal. Puesto que no hay fricción, la fuerza externa resultante es la fuerza de 12 N. El trabajo realizado por esta fuerza es

W = Fs = (12 N)(3.0 m) = 36 N.m = 36 J

Con el teorema del trabajo y la energía y al considerar que la energía cinética inicial es cero, obtenemos

$W = K_f - K_i = mv_f^2/2$
$v_f^2 = 2W/m = 2(36\ J)/6.0\ kg = 12\ m^2/s^2$
$v_f = 3.5\ m/s$

Ejercicio Con la ecuación de la cinemática $v_f^2 = v_i^2 + 2ax$, encuentre la aceleración del bloque y determine la velocidad final. Respuesta: $a = 2.0\ m/s^2$; $v_f = 3.5\ m/s$.

Un bloque que se jala sobre una superficie con fricción. Determine la velocidad final del boque descrito en el ejemplo anterior si la superficie es rugosa y el coeficiente de fricción cinético es 0.15.

Razonamiento En este caso debemos utilizar la ecuación $\Delta K = -fs$ para calcular el cambio en la energía cinética, ΔK. La fuerza neta ejercida sobre el bloque es la suma de la fuerza aplicada de 12 N y la fuerza de fricción, como se ve en la figura del ejemplo anterior. Puesto que la fuerza de fricción apunta en dirección opuesta al desplazamiento, debe restarse a la fuerza aplicada.

Solución: La magnitud de la fuerza de fricción es $f = \mu N = \mu mg$. Por lo tanto, la fuerza neta que actúa sobre el bloque es

$F_{neta} = F - \mu mg = 12\ N - (0.15)(6.0\ kg)(9.80\ m/s^2)$
$= 12\ N - 8.82\ N = 3.18\ N$

Al multiplicar esta fuerza constante por el desplazamiento, y con la ecuación $\Delta K = -fs$, se encuentra que

$\Delta K = F_{neta}s = (3.18\ N)(3.0\ m) = 9.54\ J = mv_f^2/2$, considerando que $v_i = 0$. Por lo tanto

$v_f^2 = 2\Delta K/m = 2(9.54\ J)/6.0\ kg = 3.18\ m^2/s^2$
$v_f = 1.8\ m/s$.

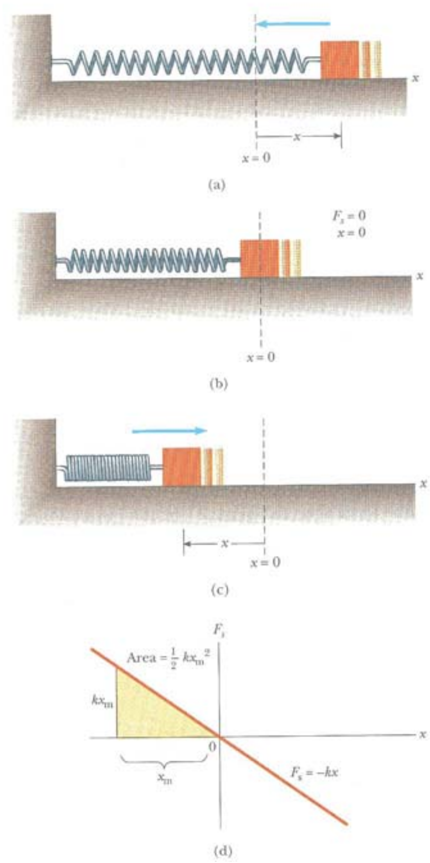
Ejercicio Encuentre la aceleración del bloque utilizando la segunda ley de Newton y determine su velocidad final utilizando los resultados de la cinemática.

Solución:
La segunda ley de Newton dice que: $F_{neta} = F - \mu mg = ma$. Despejando la aceleración se obtiene que $a = (F - \mu mg)/m = 3.18/6 = 0.53\ m/s^2$
Utilizando la ecuación de la cinemática $v_f^2 = v_i^2 + 2ax$ y considerando que $v_i = 0$ se obtiene que $v_f = (2ax)^{1/2} = (2 \times 0.53 \times 3)^{1/2} = 1.78\ m/s$.

Cuando la fricción no frena. Hemos encontrado muchas situaciones en las que están involucradas fuerzas de fricción que tienden a reducir la energía cinética de un objeto. Sin embargo, algunas veces estas fuerzas pueden aumentar la energía cinética de un objeto. Describa algunas situaciones en las que lo anterior ocurra.

Razonamiento Si una caja de madera se encuentra sobre la plataforma de un camión que acelera hacia el este, la fuerza de fricción estática ejercida sobre la caja por el camión actúa hacia el este y le da a la caja una aceleración igual a la del vehículo (suponiendo que la caja no se desliza) .Otro ejemplo es un auto que acelera debido a la fuerza de fricción ejercida sobre sus llantas por el camino. Estas fuerzas actúan en la dirección del movimiento del auto y la suma de estas fuerzas produce un aumento en la energía cinética del auto.

Un sistema masa-resorte. Un bloque con una masa de 1.6 kg se une a un resorte que tiene una fuerza constante de 1.0 x 10^3 N/m, como se ve en la figura.



El resorte se comprime una distancia de 2.0 cm y el bloque se suelta desde el reposo. (a) Calcule la velocidad del bloque conforme pasa por su posición de equilibrio x = 0 si la superficie no tiene fricción.

Solución Con la ecuación $W_r = \frac{1}{2}kx_m{}^2$ encontramos el trabajo hecho por el resorte con x = -2.0 cm = -2.0 X 10^{-2} m:

$w_r = kx_m^2 = (1.0 \times 10^5 N/m)(-2.0 \times 10^{-2} m)/2 = 0.20J$

Con el teorema del trabajo y la energía ($W_r = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$), con $v_i = 0$ se obtiene

$v_f^2 = 2W_r/m = 0.40 \text{ J}/1.6 \text{ kg} = 0.25 \text{ m}^2/\text{s}^2$

$v_f = 0.50$ m/s

(b) Calcule la velocidad del bloque cuando pasa por la posición de equilibrio si una fuerza de fricción constante de 4.0 N retarda su movimiento.

Solución: Con la ecuación $\Delta K = -fs$ calculamos la energía cinética que se pierde por la fricción y sumamos ésta a la energía cinética determinada en la ausencia de fricción. Si consideramos sólo la fuerza de fricción, la energía perdida es

$-fs = -(4.0N)(2.0 \times 10^{-2}m) = -0.08$ J

La energía cinética final, sin esta pérdida, se encontró en el inciso (a) igual a 0.20 J. Por lo tanto, la energía cinética final en presencia de fricción es

$K_f = 0.20 \text{ J} - 0.08 \text{ J} = 0.12 \text{ J} = mv_f^2/2$

$v_f^2 = 2(0.12 \text{ J})/1.6 \text{ kg} = 0.15 \text{ m}^2/\text{s}^2$

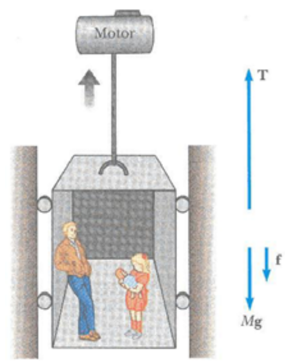
$v_f = 0.39$ m/s.

Un satélite alrededor de la Tierra. Un satélite de la Tierra está en una órbita circular a una altura de 500 km. Explique por qué el trabajo realizado por la fuerza gravitacional que actúa sobre el satélite es cero. Utilizando el teorema del trabajo y la energía, ¿qué puede usted concluir acerca de la velocidad del satélite?

Razonamiento En la figura se muestra el movimiento del satélite en una órbita circular alrededor de la Tierra.

Su velocidad es tangente a la trayectoria circular y su desplazamiento $d\bar{s}$ en cualquier pequeño intervalo de tiempo siempre está a 90° respecto de la fuerza gravitacional, que en todo momento apunta al centro de la Tierra. En este caso, cos 90° = 0, por lo tanto $\overline{F}_g \cdot d\overline{s} = 0$. De modo que conforme el satélite gire, el trabajo total que la fuerza gravitacional realiza sobre él siempre será cero. El teorema del trabajo y la energía señala que el trabajo neto sobre una partícula durante cualquier desplazamiento es igual al cambio en su energía cinética. Puesto que el trabajo neto hecho sobre el satélite es cero, el cambio en su energía cinética es cero, y su velocidad permanece constante.

Un elevador. Un elevador tiene una masa de 1,000 kg y transporta una carga máxima de 800 kg. Una fuerza de fricción constante de 4,000 N provoca su movimiento hacia arriba, como muestra la figura. (a) ¿Cuál debe ser la mínima potencia entregada por el motor para levantar el elevador a una velocidad constante de 3.00 m/s?



Solución: El motor debe suministrar la fuerza T que jala al elevador hacia arriba. De la segunda ley de Newton y del hecho de que a = 0, puesto que v es constante, obtenemos

T- f – Mg = O

donde M es la masa total (elevador más carga) , igual al 1,800 kg. Por tanto,

T = f + Mg
= 4.00 X 10^3 N + (1.80 X 10^3 kg)(9.80 m/s^2)
= 2.16 X 10^4 N

Empleando la ecuación $P = \frac{dW}{dt} = \overline{F} \cdot \frac{ds}{dt} = \overline{F} \cdot \overline{v}$ y el hecho de que T está en la misma dirección que v, se obtiene

P = (2.16 X 10^4 N) (3.00 m/s) = 6.49 X 10^4 W = 64.9 kW =87.0 cp.

ya que un caballo potencia cp = 746 W.
(b) ¿Qué potencia debe entregar el motor en cualquier instante si se diseña para brindar una aceleración hacia arriba de 1.00 m/s^2?

Solución: La aplicación de la segunda ley de Newton al elevador produce
T - f – Mg = Ma

$T = M(a + g) + f$
$T = (1.80 \times 10^5 \text{ kg}) (1.00 + 9.80)\text{m/s}^2 + 4.00 \times 10^3 \text{ N}$
$= 2.34 \text{ X } 10^4 \text{ N}$
En consecuencia, utilizando la ecuación $P = Fv$ se obtiene la potencia requerida

$P = Tv = (2.34 \times 10^4 \text{ v})W$

donde v es la velocidad instantánea del elevador en metros por segundo. Por consiguiente, la potencia requerida aumenta conforme se requiere más rapidez.

En la primera parte del ejemplo anterior, el motor entrega potencia para levantar el elevador, aunque el elevador se mueve a velocidad constante. Un estudiante que analiza esta situación afirma que, según el teorema del trabajo y la energía, si la velocidad del elevador permanece constante, el trabajo hecho sobre él es cero. El estudiante concluye que la potencia que debe entregar el motor también necesariamente será cero. ¿Cómo explicaría usted esta aparente paradoja?

Razonamiento El estudiante ha intentado aplicar el teorema del trabajo y la energía a un sistema que no actúa como una partícula (hay una fricción importante). Aplicando la ley de Newton, es la fuerza neta sobre el sistema, multiplicada por el desplazamiento (del centro de masa), lo que es igual al cambio en la energía cinética del sistema. En este caso hay tres fuerzas que actúan sobre el elevador: la fuerza hacia arriba T ejercida por el cable, la fuerza hacia abajo de la gravedad y la fuerza de fricción dirigida hacia abajo (véase la figura anterior). El elevador se mueve a velocidad constante (aceleración cero) cuando la fuerza hacia arriba se equilibra con la suma de las dos fuerzas hacia abajo ($T = Mg + f$). La potencia que aplica el motor es igual a Tv, la cual no es cero. Parte de la energía suministrada por el motor en algún intervalo de tiempo se utiliza para aumentar su energía potencial y parte se pierde debido a la fuerza de fricción. De modo que no hay ninguna paradoja.

Gasolina qua consume un auto compacto. Un auto compacto tiene una masa de 800 kg y su eficiencia está especificada en 18%. (Es decir, 18% de la energía de combustible disponible se entrega a las ruedas.) Encuentre la cantidad de gasolina consumida para acelerar el auto desde el reposo hasta 60m/h (27 m/s). Aproveche el hecho de que la energía equivalente de un galón de gasolina es 1.3×10^8 J.

Solución: La energía requerida para acelerar el auto desde el reposo hasta una velocidad *v* es la energía cinética, $mv^2/2$. En este caso,

$E = \frac{1}{2}mv^2 = 0.5 (800 \text{ kg})(27\text{m/s})^2 = 2.9 \times 10^5 \text{ J}$

Si el motor fuera 100% eficiente, cada galón de gasolina brindaría 1.3×10^8 J de energía. Puesto que el motor sólo es 18% eficiente, cada galón entrega únicamente (0.18) (1.3 x 10^8 J) = 2.3 x 10^7 J. Por tanto, el número de galones utilizados para acelerar el auto es

Número de galones = $\frac{2.9\times10^5}{2.3\times10^7}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{J/gal}}$ = 0.013 galones

En estas condiciones, un galón de gasolina se consumiría después de acelerar 77 veces. Esto demuestra las exigentes necesidades de energía en situaciones extremas de arranque y paro continuos.

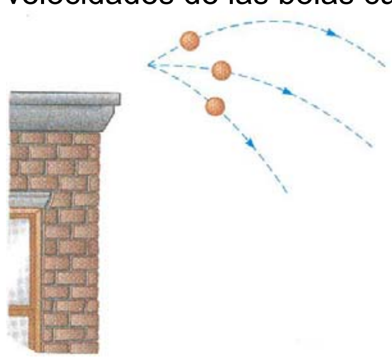
Potencia entregada a las ruedas. Suponga que el auto descrito en el ejemplo anterior tiene un valor nominal de rendimiento de combustible de 35 mi/gal cuando viaja a 60 mi/h. ¿Cuánta potencia se entrega a las ruedas?

Solución El auto consume 60/35 = 1.7 gal/h. A partir de que cada galón es equivalente a 1.3 x 10^8 J. encontramos que la potencia total consumida es

P = (1.7 gal/h) (1.3 x 10^8 J/gal)/(3.6 x 10^5 s/h) = 62 kW

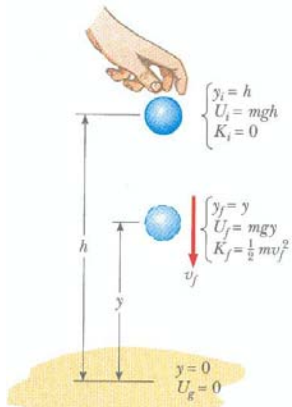
Puesto que 18% de la potencia disponible se emplea para impulsar el auto, la potencia entregada a las ruedas es (0,18)(62kW) = 11 kW. Este valor es aproximadamente la mitad del obtenido para el auto grande de 1,450 kg analizado en el texto. Sin duda el tamaño es un factor importante en los mecanismos de pérdida de potencia.

Proyectiles. Tres bolas idénticas se lanzan desde la parte superior de un edificio, todas con la misma velocidad inicial. La primera bola se lanza horizontalmente, la segunda a cierto ángulo sobre la horizontal, y la tercera a cierto ángulo debajo de la horizontal, como muestra la figura. Ignore la resistencia del aire y describa sus movimientos y compare las velocidades de las bolas cuando llegan al suelo.



Razonamiento La primera y tercera bolas aumentan su velocidad después de que son lanzadas, en tanto que la segunda primero se frena y después, luego de alcanzar altura máxima, aumenta su velocidad. Las trayectorias de las tres son parábolas. Las tres tardan diferentes tiempos para llegar al suelo. Sin embargo, todas tienen la misma velocidad de impacto debido a que empiezan con la misma energía cinética y experimentan el mismo cambio en energía potencial gravitacional. En otras palabras, $E_{total} = \frac{1}{2}mv^2 + mgh$ es la misma para las tres bolas.

Una pelota en caída libre. En la figura se ilustra cómo se deja caer una bola de masa m desde una altura h sobre el suelo.



(a) Ignore la resistencia del aire y determine la velocidad de la bola cuando está a una altura y sobre el suelo.

Razonamiento Puesto que la bola está en caída libre, la única fuerza que actúa sobre ella es la gravitacional. En consecuencia, podemos usar el principio de conservación de la energía mecánica. En principio, la bola tiene energía potencial y no energía cinética. Conforme cae, su energía total (la suma de las energías cinética y potencial) permanece constante y es igual a su energía potencial inicial.

Solución Cuando la bola se suelta desde el reposo a una altura h sobre el suelo, su energía cinética es $K_i = 0$ y su energía potencial es U = mgh. Cuando la bola se encuentra a una distancia y sobre el suelo su energía cinética es $K_f = mv^2/2$ y su energía potencial en relación con el suelo es U_f = mgy, donde la coordenada y se mide desde el nivel del suelo. Al aplicar la ecuación $K_i + U_i = K_f + U_f$, obtenemos

$0 + mgh = mv_f^2/2 + mgy$

$v_f^2 = 2g(h - y)$

$v_f = [2g(h - y)]^{1/2}$

(b) Determine la velocidad de la bola a una altura h si se le da una velocidad inicial v_i.

Solución En este caso, la energía inicial incluye la energía cinética igual a $mv_i^2/2$, y de la ecuación

$$\frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f$$

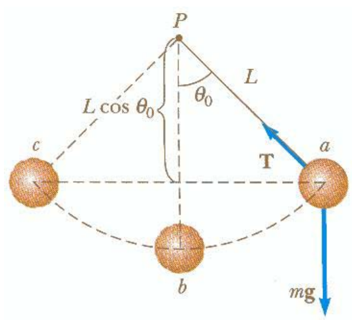
se obtiene $\frac{1}{2}mv_i^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy$.

La velocidad a la altura y esta dada por

$$v_f^2 = \sqrt{v_i^2 + 2g(h - y)}$$

Este resultado es consistente con la expresión $v_y^2 = v_{y0}^2 + 2g(y - y_0)$, de la cinemática, donde y_0 = h. Asimismo, este resultado es válido incluso si la velocidad inicial forma un ángulo con la horizontal (el caso de un proyectil).

El péndulo simple. La figura muestra un péndulo compuesto por una esfera de masa m unida a una cuerda ligera de longitud L La esfera se suelta desde el reposo cuando la cuerda forma un ángulo 90^o con la vertical, y el pivote en P no tiene fricción.



(a) Encuentre la, velocidad de la esfera cuando ésta se encuentra en el punto más bajo, b.

Razonamiento La única fuerza que realiza trabajo sobre m es la fuerza de la gravedad, ya que la fuerza de la tensión siempre es perpendicular a cada elemento del desplazamiento y, en consecuencia, no efectúa trabajo. En vista de que la fuerza de la gravedad es una fuerza conservativa, la energía mecánica total es constante. Por consiguiente, cuando el péndulo se balancea, hay una transferencia continua entre la energía potencial y la cinética. En el instante en que se suelta el péndulo, la energía es totalmente potencial. En el punto b, el péndulo tiene energía cinética pero ha perdido energía potencial. En el punto *c* el péndulo ha recuperado su energía potencial y su energía cinética es otra vez cero.

Solución Si se miden las coordenadas verticales a partir del centro de rotación, entonces $y_a = -L\cos\theta_0$ y $y_b = -L$. Por tanto, $U_a = -mgL\cos\theta_0$ y $U_b = -mgL$. La aplicación del principio de conservación de la energía mecánica produce

$$K_a + U_a = K_b + U_b$$

$$0 - mgL\cos\theta_0 = \frac{1}{2}mv_b^2 - mgL$$

$$v_b = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta_0)}$$

(b) ¿Cuál es la tensión T en la cuerda en el punto b?

Solución Puesto que la fuerza de tensión no realiza trabajo, no puede determinarse con el método de la energía. Para encontrar T_b, podemos aplicar la segunda ley de Newton en la dirección radial. Primero, recordemos que la aceleración centrípeta de una partícula que se mueve en un círculo es igual v^2/r dirigida hacia el centro de rotación. Como r = L en este ejemplo, obtenemos

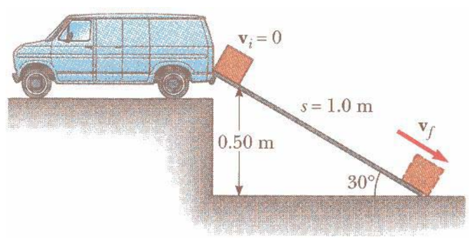
$$\sum F_r = T_b - mg = ma_r = mv_b{}^2/L$$

Al combinar esta ecuación con la expresión obtenida en (a) obtenemos la tensión en el punto b:

$$T_b = mg + 2mg(1 - \cos\theta_0) = mg(3 - 2\cos\theta_0)$$

Ejercicio Un péndulo de 2.00 m de longitud y 0.500 kg de masa se suelta desde el reposo cuando la cuerda forma un ángulo de 30.0° con la vertical. Encuentre la velocidad de la esfera y la tensión en la cuerda cuando la esfera se encuentra en su punto más bajo.
Respuesta 2.29 m/s; 6.21 N.

Plano inclinado. Una caja que desliza hacia abajo por una rampa. La figura muestra una caja de 3.0 kg que se desliza hacia abajo por una rampa en un muelle de carga.



La rampa mide 1.0 m de largo y está inclinada a 30.0°. La caja empieza desde el reposo en la parte superior, experimenta una fuerza de fricción constante cuya magnitud es igual a 5.0 N y continúa moviéndose una corta distancia sobre el suelo plano. Utilice métodos de energía para determinar la velocidad de la caja cuando alcanza el punto inferior de la rampa.

Solución Puesto que v_i = 0, la energía cinética inicial es cero. Si la coordenada vertical (y) se mide desde la parte inferior de la rampa, entonces y_i = 0.50 m. Por lo tanto, la energía mecánica total del sistema en la parte superior es en su totalidad energía potencial:

$U_i = mgy_i = (3.00\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)\ (0.500\ \text{m}) = 14.7\ \text{J}$

Cuando la caja alcanza el punto inferior, la energía potencial es cero debido a que su elevación es $y_f = 0$. Por consiguiente, la energía mecánica total en el punto inferior es en su totalidad energía cinética,

$K_f = mv^2/2$

Sin embargo, en este caso no podemos decir que $U_i = K_f$ porque hay una fuerza no conservativa externa que extrae energía mecánica del sistema: la fuerza de fricción. En este caso, $\Delta K_{ext} = -fs$, donde s es el desplazamiento a lo largo de la rampa. Recuérdese que las fuerzas normales a la rampa no trabajan sobre la caja debido a que son perpendiculares al desplazamiento.) Con f = 5.00 N y s = 1.00 m, tenemos

$\Delta K_{ext} = -fs$ = (-5.00 N)(1.00 m) = -5.00 J

Esta expresión nos dice que una parte de la energía mecánica se pierde por la presencia de la fuerza de fricción retardadora. La aplicación de la ecuación $\int \overline{F}_{neta} \cdot d\overline{x} = \Delta K$ produce

$$-fs = \frac{1}{2}mv_f^{\,2} - mgy_i$$

$$v_f = \sqrt{\frac{2(mgy_i - fs)}{m}} = \sqrt{\frac{2(14.7\text{ J} - 5.0\text{ J})}{3.0\text{ kg}}} = 2.54\text{ m/s}$$

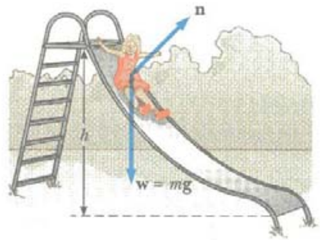
Ejercicio Con la segunda ley de Newton determine la aceleración de la caja a lo largo de la rampa, y con las ecuaciones de la cinemática encuentre la velocidad final de la caja.

Solución:
La segunda ley de Newton nos dice que $\sum F = mg\text{sen}\theta - f_s = ma$. Despejando la aceleración se obtiene $a = (mg\text{sen}\theta - f_s)/m$ = (3 x 9.81 x sen30 – 5)/3 = 3.23 m/s^2.

De la cinemática, tenemos la ecuación $v^2 = v_0^{\,2} + 2ax$. Como $v_0 = 0$, v = $(2ax)^{1/2}$ = $(2 \times 3.23 \times 1)^{1/2}$ = 2.54 m/s.

Ejercicio Si se supone que no hay fricción en la rampa, encuentre la velocidad final de la caja y su aceleración a lo largo de la rampa.
Respuesta 3.13 m/s; 4.90 m/s^2.

Movimiento sobre un plano inclinado curvo. Una niña de masa m se desplaza sobre un tobogán irregularmente curvo de altura h = 6.00 m, como muestra la figura.



La niña parte del reposo en el parte superior. (a) Considere que no hay fricción y determine la velocidad de la niña en la parte inferior.

Razonamiento La fuerza normal, **n**, no realiza trabajo sobre la niña puesto que esta fuerza siempre es perpendicular a cada elemento del desplazamiento. Además, puesto que no hay fricción, la energía mecánica es constante, es decir, K + U = constante.
Solución Si medimos la coordenada vertical (y) desde el punto inferior del tobogán, entonces $y_i = h$, $y_f = 0$, y se obtiene

$K_i + U_i = K_f + U_f$

$0 + mgh = mv^2/2 + 0$

$v_f^2 = 2gh$

Observe que el resultado es el mismo como si la niña hubiera caído verticalmente una distancia h. En este ejemplo, h = 6.00 m, lo que produce

$v_f = [2\ (9.80\ m/s^2)(6.00\ m)]^{1/2} = 10.8\ m/s$

(b) Si una fuerza de fricción actúa sobre la niña, ¿qué cantidad de energía disipa dicha fuerza? Suponga que v_f = 8.00 m/s y m = 20.0 kg.

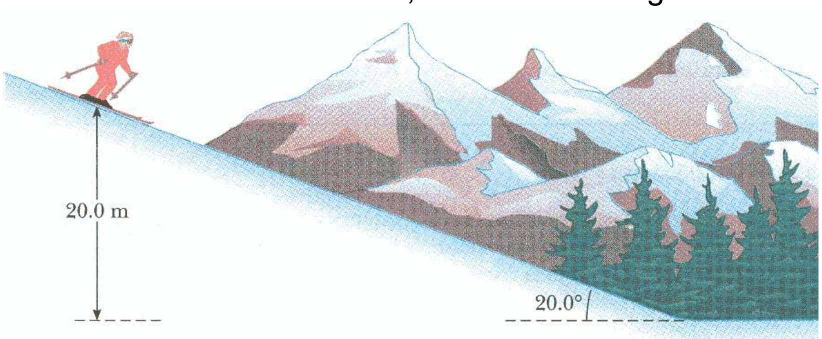
Solución En este caso $\Delta K_{ext} \neq 0$ y la energía mecánica no es constante. Podemos utilizar la ecuación $\int \overline{F}\times d\overline{x} = \Delta K$ para encontrar la pérdida de energía cinética producida por la fricción, suponiendo que se conoce la velocidad final en el punto inferior:

$$\Delta K_{ext} = E_f - E_i = \frac{1}{2} m v_f^{\,2} - mgh$$

ΔK_{ext} = (20.0 kg) (8.00 m/s)^2/2 - (20.0 kg) (9.80 m/s^2) (6.00 m) = - 536 J

De nuevo, ΔK_{ext} es negativa como consecuencia de que la fricción extrae energía cinética del sistema. Nótese, sin embargo, que debido a que el tobogán es curvo, la fuerza normal cambia en magnitud y dirección durante el movimiento. En consecuencia, la fuerza de fricción, que es proporcional a **n**, cambia también durante el movimiento. ¿Pensaría usted que es posible determinar el coeficiente de fricción μ a partir de estos datos?

Vamos a esquiar. Un esquiador parte del reposo desde la parte superior de una pendiente sin fricción de 20.0 m de altura, como se ve la figura.



En el pie de la pendiente, el esquiador encuentra una superficie horizontal donde el coeficiente de fricción cinética entre los esquís y la nieve es de 0.210. ¿Cuánto viaja el esquiador sobre la superficie horizontal antes de detenerse?

Solución Primero calculemos la velocidad del esquiador en el pie de la pendiente. Puesto que ésta no presenta fricción, la energía mecánica permanece constante, de modo que encontramos

$v = \sqrt{2gh}$ = [2(9.80 m/s^2)(20.0 m)]$^{1/2}$ = 19.8 m/s

Luego aplicamos la ecuación $\int \overline{F} \cdot d\overline{x} = \Delta K$ conforme el esquiador se mueve a lo largo de la superficie horizontal rugosa. El cambio en la energía cinética a lo largo de la horizontal es $\Delta K_{ext} = -fs$, donde s es el desplazamiento horizontal. Por tanto,

$$\Delta K_{ext} = -fs = K_f - K_i$$

Para determinar la distancia que el esquiador recorre antes de detenerse, se toma $K_f = 0$. Puesto que v_i = 19.8 m/s, y la fuerza de fricción es $f = \mu n = \mu mg$, se obtiene

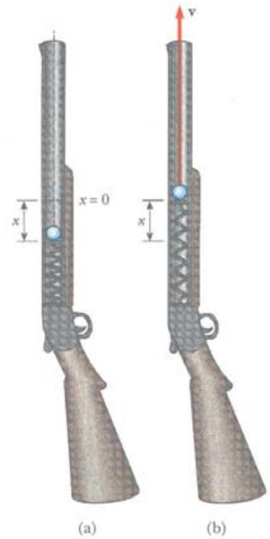
$$-\mu mgs = -\frac{1}{2} m v_i^2$$

o bien, despejando s

$$s = \frac{v_i^2}{2\mu g} = \frac{(19.8 \text{ m/s})^2}{2(0.21)(9.8 \text{ m/s}^2)} = 95.2 \text{ m}$$

Ejercicio Encuentre la distancia horizontal que recorre el esquiador antes de detenerse si la pendiente también tiene un coeficiente de fricción cinética igual a 0.210.
Respuesta 40.3 m.

El rifle de aire comprimido. El mecanismo de disparo de un rifle de juguete se compone de un resorte de constante desconocida.



Cuando el resorte se comprime 0.120 m, el rifle es capaz de lanzar un proyectil de 35.0 g hasta una altura máxima de 20.0 m cuando se dispara verticalmente desde el reposo. (a) Ignore todas las fuerzas resistivas y determine la constante del resorte.

Razonamiento Puesto que el proyectil parte del reposo, la energía cinética inicial en el sistema es cero. Si el punto cero para la energía potencial gravitacional se establece en la posición más baja del proyectil, entonces la energía potencial gravitacional inicial también es cero. La energía mecánica de este sistema permanece constante debido a que no hay fuerzas no conservativas presentes.

Solución La energía inicial total del sistema es la energía potencial elástica almacenada en el resorte, que es $kx^2/2$. Como el proyectil alcanza una altura máxima h = 20.0 m, la energía potencial gravitacional final es mgh, su energía cinética final es cero, y la energía potencial elástica final también es cero. Como la energía mecánica del sistema es constante, encontramos $\frac{1}{2}kx^2 = mgh$, de donde

$$k = \frac{2mgh}{x^2}$$

$$k = \frac{2(0.035\ kg)(9.8\ m/s^2)(20.0\ m)}{(0.12\ m)^2} = 953\ N/m$$

(b) Determine la velocidad del proyectil cuando pasa por la posición de equilibrio del resorte (donde x = 0), como se muestra en la figura.

Solución Usando el mismo nivel de referencia para la energía potencial gravitacional que en el inciso (a) vemos que la energía inicial del sistema es aún la energía potencial elástica $kx^2/2$.

La energía del sistema cuando el proyectil se mueve a través de la posición no deformada del resorte se compone de la energía cinética del proyectil, $mv^2/2$, y su energía potencial gravitacional, mgx. Por consiguiente, en este caso la conservación de la energía produce

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgx$$

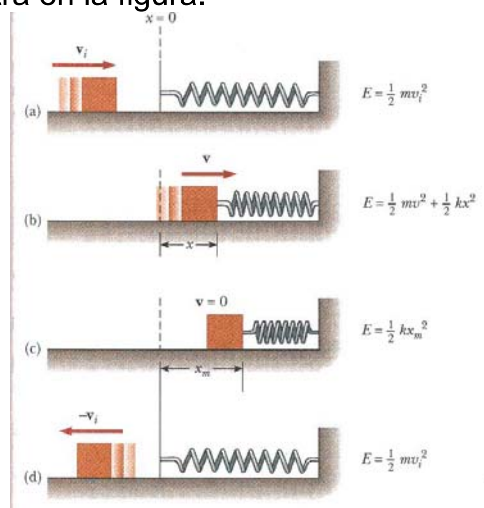
Al despejar la velocidad *v* se obtiene

$$v = \sqrt{\frac{kx^2}{m} - 2gh}$$

sustituyendo los valores de todas las variables se obtiene v = 19.7 m/s.

Ejercicio ¿Cuál es la velocidad del proyectil cuando está a una altura de 10.0 m?
Respuesta 14.0 m/s.

Choque masa-resorte. A una masa de 0.8 kg se le da una velocidad inicial v_i = 1.2 m/s hacia la derecha y choca con un resorte ligero de constante de *fuerza* k = 50 N/m, como se muestra en la figura.



(a) Si la superficie no presenta fricción, calcule la compresión máxima inicial del resorte después del choque.

Razonamiento Antes del choque, la masa tiene energía cinética y el resorte está en equilibrio, y su energía almacenada es cero. Así pues, la energía total del sistema (masa más resorte) antes del choque es $mv^2/2$. Después del choque, y cuando el resorte está totalmente comprimido, la masa está en reposo y su energía cinética es cero, mientras que la energía almacenada en el resorte tiene su valor máximo, $kx^2/2$.
La energía mecánica total del sistema es constante puesto que no actúan fuerzas no conservativas sobre él.
Solución Como la energía mecánica es constante, la energía cinética de la masa antes del choque debe ser igual a la energía máxima almacenada en el resorte cuando éste está totalmente comprimido, o

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}kx_f^2$$

despejando

$$x_f = \sqrt{\frac{m}{k}} v_i$$

sustituyendo los valores de todas las variables se obtiene x_f = 0.15 m.

(b) Si una fuerza constante de fricción actúa entre el bloque y la superficie con μ = 0.50 y si la velocidad del bloque en el momento de chocar con el resorte es v_i = 1.2 m/s, ¿cuál es la compresión máxima en el resorte?

Solución En este caso, como consecuencia de la fricción, la energía mecánica no se conserva. La magnitud de la fuerza de fricción es

$$f = \mu n = \mu mg$$

$$f = 0.50(0.80 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 3.9 \text{ N}$$

En consecuencia, la pérdida de energía cinética debido a la fricción cuando el bloque se desplaza de $x_i = 0$ a $x_f = x$ es

$$\Delta K_{ext} = - fx$$

La sustitución de ésta en la ecuación $\Delta K + \Delta U = \Delta K_{int\text{-}nc} + \Delta K_{ext}$ produce

$$\Delta K_{ext} = (0 + \frac{1}{2}kx^2) - (\frac{1}{2}mv_i^2 + 0)$$

o bien,

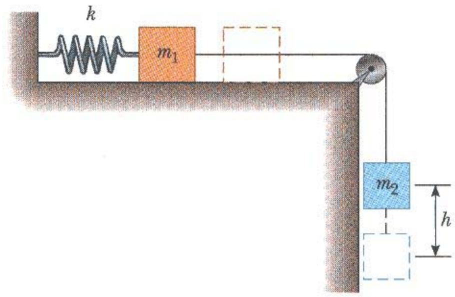
$$-fx = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

con los valores de las variables conocidas, se obtiene

$$25x^2 + 3.92x - 0.576 = 0$$

Al resolver la ecuación cuadrática para x se obtienen los valores x_1 = 0.092 m y x_2 = -0.25 m. La solución con significado físico es x_1 = 0.092 m = 9.2 cm. La raíz negativa no tiene sentido debido a que, cuando se detiene, el bloque debe encontrarse a la derecha del origen. Nótese que 9.2 cm es menor que la distancia obtenida en el caso sin fricción (a). Este resultado es el esperado debido a que la fricción retarda el movimiento del sistema.

Bloques conectados en movimiento. En la figura se muestran dos bloques conectados entre sí por medio de una cuerda ligera que pasa sobre una polea sin fricción.



El bloque de masa m_1 descansa sobre una superficie horizontal y está conectado a un resorte de constante de fuerza k. El sistema se libera desde el reposo cuando el resorte no está deformado. Si m_2 cae una distancia h antes de quedar en reposo, calcule el coeficiente de fricción cinética entre m_1 y la superficie.

Razonamiento y solución En esta situación se deben considerar dos formas de energía potencial: gravitacional y elástica. Escribiendo la ecuación $\Delta K + \Delta U = \Delta K_{int\text{-}nc} + \Delta K_{ext}$ como

$$\Delta K_{ext} = \Delta K + \Delta U_g + \Delta U_s$$

donde ΔU_g es el cambio en la energía potencial gravitacional, y ΔU_s; es el cambio en la energía potencial elástica del sistema. En esta situación, $\Delta K = 0$ debido a que la velocidad inicial y final del sistema son cero. Asimismo, la pérdida en la energía cinética debido a la fricción es

$$\Delta K_{ext} = - fs = - \mu m_1 gh$$

El cambio en la energía potencial gravitacional se asocia sólo con m_2 puesto que la coordenada vertical de m_1 no cambia. En consecuencia, obtenemos

$$\Delta U_g = U_f - U_i = - m_2 gh$$

donde las coordenadas se han medido desde la posición más baja de m_2. El cambio en la energía potencial elástica en el resorte es

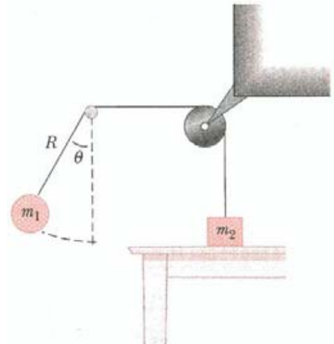
$$\Delta U_s = U_f - U_i = \frac{1}{2} kh^2 - 0$$

Al combinar estas ultimas ecuaciones, se obtiene

$$- \mu m_1 gh = - m_2 gh + \frac{1}{2} kh^2$$

Esta fórmula representa una manera de medir el coeficiente de fricción cinética entre un objeto y alguna superficie.

Una forma de levantar un objeto. La figura muestra dos bloques unidos entre sí por medio de una cuerda sin masa que pasa por una polea sin fricción y una clavija sin fricción.



Un extremo de la cuerda está unida a una masa m_1 = 3.00 kg que está a una distancia R = 1.20 m de la clavija. El otro extremo de la cuerda se conecta a un bloque de masa m_2 = 6.00 kg que descansa sobre una mesa. ¿Desde qué ángulo θ (medido desde la vertical) debe soltarse la masa de 3.00 kg con el fin de que se levante de la mesa el bloque de 6.00?

Razonamiento Es necesario el auxilio de varios conceptos para resolver este problema. Primero, debemos emplear la conservación de la energía para encontrar la velocidad de la masa de 3.00 kg en la parte inferior de la trayectoria circular como una función de θ y del radio de la trayectoria. Luego, aplicamos la segunda ley de Newton a la masa de 3.00 kg en el punto inferior de su trayectoria para determinar la tensión como una función de los parámetros dados. Por último, debemos advertir que el bloque de 6.00 kg se levanta de la mesa cuando la fuerza hacia arriba que la cuerda ejerce sobre él supera a la fuerza de la gravedad que actúa sobre el bloque. Este procedimiento nos permite encontrar el ángulo buscado.
Solución La aplicación de la conservación de la energía a la masa de 3.00 kg produce
$K_i + U_i = K_f + U_f$

$0 + m_1 g y_i = m_1 v^2/2 + 0$

donde *v* es la velocidad de la masa de 3.00 kg en la parte inferior de su trayectoria. (Nótese que K_i = 0 puesto que la masa de 3.00 kg parte del reposo y U_f = 0 en virtud de que la parte inferior del círculo es el nivel cero de la energía potencial.) De acuerdo con la geometría, en la figura vemos que $y_i = R - R\cos\theta$. El empleo de esta relación en la ecuación anterior produce

$$v^2 = 2gR(1 - \cos\theta)$$

Después de esto aplicando la segunda ley de Newton a la masa de 3.00 kg cuando ésta se encuentra en la parte inferior de la trayectoria circular, se obtiene

$$T - m_1 g = m_1 \frac{v^2}{R}$$

o bien

$$T = m_1 g + m_1 \frac{v^2}{R}$$

Esta misma fuerza se transmite al bloque de 6.00 kg, y si éste apenas se va a levantar de la mesa, la fuerza normal sobre él se vuelve cero, y es necesario que $T = m_2 g$. Usando esta condición, junto con las expresiones anteriores, se obtiene

$$m_2 g = m_1 g + m_1 \frac{2gR(1 - \cos\theta)}{R}$$

es decir

$$\cos\theta = \frac{3m_1 - m_2}{2m_1}$$

Al sustituir los parámetros dados, se encuentra que $\theta = 60.0^{o}$.

Ejercicio Si el ángulo inicial es θ = 40.0°, encuentre la velocidad de la masa de 3.00 kg y la tensión en la cuerda cuando esta masa está en el punto más bajo de la trayectoria circular.
Respuesta 2.35 m/s; 43.2 N.